

Del GAMAR a la escuela: Principios sobre el uso de materiales manipulativos en el aula de matemáticas

Ángel Alsina

(Cátedra de Didáctica de las Matemáticas M. Antònia Canals de la Universitat de Girona. España)

Ester Bosch i Casas

(Gabinet de Materials i de Recerca per a la Matemàtica a l'Escola, GAMAR. España)

Resumen

En este artículo de introducción de la sección *Materiales para hacer y pensar matemáticas* se han descrito diez reflexiones y pensamientos de M. Antònia Canals, que se han denominado Principios. Estos Principios son un instrumento de orientación y de reflexión sobre los aspectos clave para usar eficazmente los materiales manipulativos en el aula de matemáticas: los criterios de selección, las principales funciones y la gestión. Dichos Principios son el punto de partida para mostrar, en los próximos números, diversos materiales del Gabinet de Materials i de Recerca per a la Matemàtica a l'Escola (GAMAR), que forma parte de la Cátedra de Didáctica de las Matemáticas M. Antònia Canals, enfatizando cómo promover el potencial de estos materiales para desarrollar los sentidos matemáticos.

Palabras clave

Enseñanza de las matemáticas, práctica matemática, materiales manipulativos, aprendizaje de las matemáticas, sentidos matemáticos.

Title

From GAMAR to school: Principles on the use of manipulatives in the mathematics classroom.

Abstract

In this introductory article of the section *Materials for doing and thinking mathematics*, ten reflections and thoughts by M. Antònia Canals have been described, which have been called principles. These principles are an instrument for guiding and reflecting on the key aspects for the effective use of manipulatives in the mathematics classroom: selection criteria, main functions and management. These principles are the basis for showing, in the next issues, several manipulatives from the Gabinet de Materials i de Recerca per a la Matemàtica a l'Escola (GAMAR), which is part of the M. Antònia Canals Chair of Mathematics Education, emphasising how to promote the potential of these materials to develop the mathematical senses.

Keywords

Mathematics teaching, mathematical practice, manipulatives, mathematical learning, mathematical senses.

1. Introducción

El GAMAR, por su acrónimo en catalán (Gabinet de Materials i de Recerca per a la Matemàtica a l'Escola), fue creado en 2001 por la profesora emérita de la Universitat de Girona M. Antònia Canals, con la voluntad de ser un punto de encuentro y de referencia para la educación matemática en la escuela. Actualmente, forma parte de la *Cátedra de Didáctica de las Matemáticas M. Antònia Canals*, cuyo principal objetivo es



Sociedad Canaria de Profesorado de Matemáticas

Luis Balbuena Castellano

Del Gamar a la escuela: Principios sobre el uso de materiales manipulativos en el aula de mat.

Á. Alsina y E. Bosch i Casas

impulsar el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas y contribuir a mejorar la competencia matemática de los niños y niñas.

El GAMAR es un espacio de formación, reflexión y descubrimiento de materiales manipulativos dirigidos sobre todo a las etapas de educación infantil y primaria, que ofrece al profesorado de estas etapas la oportunidad de profundizar en los beneficios educativos que tiene la exploración y la manipulación para adquirir las bases necesarias para aprender matemáticas (Figura 1).



Figura 1. Divulgación de los materiales del GAMAR. Fuente: GAMAR

Durante su larga trayectoria, M. Antònia Canals elaboró una compilación esmerada de materiales relacionados con buenas propuestas educativas que se pueden consultar en la sede del GAMAR², ubicado en la Biblioteca del Barri Vell de la Universitat de Girona.

Estos materiales se vinculan con las grandes ideas matemáticas o ideas clave. La noción de idea central o de gran idea en matemáticas se refiere a “una declaración de una idea que es central para el aprendizaje de las matemáticas, una idea que vincula numerosos conocimientos matemáticos en un todo coherente” (Charles, 2005, p. 10). Para Toh y Yeo (2019), el énfasis de las grandes ideas en matemáticas puede traducirse en un esfuerzo consciente por conseguir que el alumnado vea las matemáticas como un sistema altamente conectado de pensamiento y conceptos a través de varios temas, en lugar de verlos como conceptos aislados. En este sentido, pues, las ideas centrales se refieren a las conexiones de varias nociones a través de las matemáticas y, desde este punto de vista, son una base para el profesorado de matemáticas. Este planteamiento se ha recogido, por ejemplo, en el currículo de matemáticas del Singapore Ministry of Education (2018), que destaca que es necesario “desarrollar una mayor conciencia de la naturaleza de las matemáticas y las grandes ideas que son centrales de la disciplina” (p. 9), con el fin de lograr la coherencia entre los diferentes temas. En concreto, en el caso de los materiales del GAMAR, los vínculos se han establecido con las *ideas centrales* propuestas por el CESIRE del ámbito de matemáticas del Departament d’Educació i Formació Professional de la Generalitat de Catalunya³.

La gran riqueza del GAMAR es, pues, la variedad de materiales, tanto por lo que se refiere a los sentidos matemáticos que abordan como al amplio rango de edades a los que van dirigidos, pero todos ellos tienen una misma característica, que los hace especialmente relevantes: son materiales aparentemente muy sencillos y fáciles de construir, pero con un gran potencial didáctico. En concreto, los materiales están estructurados con base en los sentidos numérico, espacial, de la medida, algebraico

y estocástico, para remarcar el objetivo inmediato que se quiere conseguir con cada recurso. Aun así, el objetivo final de estos materiales va mucho más allá del propio saber básico trabajado.

Desde esta perspectiva, el objetivo de este primer artículo de la nueva sección *Materiales para hacer y pensar matemáticas* de *Números* es profundizar en el uso de materiales manipulativos en el aula de matemáticas. Para ello, tenemos muy presente la mirada de M. Antònia Canals, no sólo para que sirva de reconocimiento a sus aportaciones, sino sobre todo porque estamos firmemente convencidos de que su punto de vista nos puede ayudar a sumergirnos en la mente de los niños y de las niñas para entenderlos mejor y ofrecerles lo que necesitan para aprender matemáticas; y también en las mentes del profesorado, para comprender mejor su tarea docente. Nuestra pretensión, pues, no es hacer una exposición de materiales, sino que, a través de algunas reflexiones, pensamientos y el decálogo de M. Antònia Canals para trabajar con materiales manipulativos (e.g., Alsina y Soler, 2005; Biniés, 2008; Canals, 2001; Sotos, 2015, 2016), haremos un viaje hacia el interior de los materiales. De este modo, a partir de diez Principios que se deberían tener en cuenta para usar materiales manipulativos en el aula de matemáticas, se presenta una hoja de ruta que sirva de base para ir exponiendo diferentes materiales en los próximos números de la sección, enfatizando sobre todo cómo promover su potencial.

2. Principios sobre el uso de los materiales manipulativos en el aula de matemáticas: Una hoja de ruta para la práctica docente

El nobel de literatura José Saramago (1922-2010), ilustró de manera concisa el papel de la manipulación de materiales en la humanidad. En su famoso libro *La Caverna* (Saramago, 2000) dejó escrito que:

Para que el cerebro de la cabeza supiera lo que era una piedra, fue necesario que los dedos la tocaran, sintieran su aspereza, el peso y la densidad, fue necesario que se hirieran con ella. Sólo mucho tiempo después, el cerebro comprendió que de aquel remiendo de roca se podría hacer una cosa a la que llamaría puñal (p. 92).

Este vínculo entre la acción directa sobre los objetos y la actividad mental, entre el hacer y el pensar, es el foco a partir del que se organizan los diez Principios que se presentan a continuación, con el propósito de orientar la práctica docente en torno al uso de materiales manipulativos en el aula de matemáticas.

Principio 1:

“El profesorado de matemáticas tiene que saber por qué escoge un material y no otro”

Los materiales manipulativos son muy útiles para ayudar a los niños y las niñas a dar el paso hacia la abstracción, pero el material por sí solo no necesariamente genera aprendizaje. Hay que tener muy claras dos cuestiones: por un lado, qué materiales se pretenden utilizar; y, por otro, lo que se pretende conseguir con ellos y qué proceso didáctico debe seguirse.

La selección de los materiales que se pretenden utilizar se vincula con la idea de *prácticas selectivas*. Desde el Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas (EIEM), Alsina (2020a) señala que actualmente existe una cantidad impresionante de recursos en general y de materiales manipulativos en particular para enseñar matemáticas. Se trata de materiales de procedencia muy



distinta, desde expertos en el campo de la educación matemática hasta empresas con ánimo de lucro, sin olvidar la gran cantidad de propuestas de distintos tipos que pueden encontrarse en Internet, algunas veces sin ningún filtro que garantice su calidad. Resulta evidente que esta avalancha de recursos requiere que los profesionales de la educación dispongan de un conocimiento profesional crítico para tener criterios objetivos que permitan seleccionar de manera eficaz los materiales manipulativos que garanticen un buen desarrollo de la competencia matemática.

Desde esta perspectiva, se asume que es necesario que el profesorado pueda disponer de criterios para saber cuándo, qué y por qué algo es conveniente y reflexionar sobre ello sistemáticamente (Korthagen, 2001). Es evidente, pues, que la reflexión sobre la propia práctica es una estrategia útil para indagar sobre interrogantes que genera la selección de materiales, como por ejemplo ¿qué materiales puedo utilizar para garantizar que desarrollen el sentido numérico?, ¿del conjunto de materiales que conozco, que aporta cada uno?, ¿si tuviera que seleccionar uno, cual es el más potente?

Alsina (2020a) plantea que es necesario disponer de herramientas que permitan seleccionar cualitativamente los materiales que se tienen al alcance. En este sentido, y en coherencia con el enfoque competencial de las matemáticas que proponen los actuales currículos de matemáticas, se considera que un buen material debería facilitar la resolución de problemas, el razonamiento y la prueba, la comunicación, las conexiones y/o la representación. En otras palabras, deben seleccionarse materiales suficientemente ricos que permitan proponer retos que inviten a pensar y hacer; plantear buenas preguntas que lleven a argumentar, justificar y explicar; vincular saberes matemáticos de diversos sentidos; y usar lenguaje matemático para expresar los descubrimientos, tanto oralmente como a través de otras formas gráficas o escritas (dibujos, esquemas, símbolos, etc.) para representarlas.

Este planteamiento enlaza con la reflexión en torno a qué se pretende conseguir con los materiales y qué proceso didáctico debe seguirse. En este sentido, López y Alsina (2018) indican que la función que se da a la práctica matemática crea, sin ninguna duda, su forma. Así, enseñar matemáticas en un contexto en el que se permita al alumnado aprender a partir de materiales manipulativos, pero sin un buen acompañamiento por parte del profesorado, puede dificultar el aprendizaje. Si los niños y las niñas no hacen un buen uso del material, no se enfrentan a retos y no hay una buena orientación por parte del adulto, por ejemplo, planteando buenas preguntas que les permitan cuestionarse las cosas y establecer relaciones, se puede llegar a convertir en contraproducente a largo plazo. Tal y como decía un antiguo proverbio de la sabiduría china (Stevens, 2011, p. 13):

En verdad todo depende, en esas cosas, del hombre, y poco o nada del método. El método es ciertamente sólo el camino y la dirección que uno toma, mediante lo cual el cómo de su obrar es la fiel expresión de su ser. Si esto no es así, el método no es más que una afectación, algo artificial aprendido como un agregado, sin raíces ni savia, sirviendo al objetivo ilegal del autoencubrimiento, un medio de ilusionarse sobre sí mismo y escapar a la ley quizás implacable del propio ser.

Esto explicaría, por ejemplo, el bajo rendimiento matemático identificado en un aula de educación infantil en la que, a pesar de que la metodología predominante era la manipulación de materiales, se obtuvieron peores resultados que en otras aulas en la que predominaban otras metodologías y recursos como las fichas (López, 2015). Una de las principales conclusiones de este estudio, en el que se comparaba el efecto de diversas metodologías para enseñar matemáticas en educación infantil, fue que el uso de materiales quizás sea un escenario que a simple vista pueda parecer más idóneo para el

aprendizaje, pero si la manipulación de dichos materiales no va acompañada de retos y ayudas de calidad por parte del profesorado, difícilmente se consigue un mejor rendimiento.

En definitiva, pues, es indispensable plantearse cuál es el objetivo didáctico y metodológico que se pretende conseguir más allá del estándar de contenido o saber básico que se pretenda trabajar. El alumnado tiene que poder descubrir, imaginar, organizar datos, visualizar, gestionar el error... y no solo practicar conceptos de una manera más motivadora. El profesorado debería seleccionar el material basándose en estos propósitos, proponer actividades adecuadas y acompañar a los niños y las niñas con buenas preguntas que les ayuden a progresar en sus aprendizajes.

Principio 2:

“Las acciones sobre los objetos son las que desencadenan el pensamiento matemático”

Cuando se ofrece a los niños y a las niñas la posibilidad de interactuar con los materiales, se activa la necesidad de pensar, reaccionar, observar qué ha pasado, rectificar, modificar o analizar. Vivirlo en primera persona les hace protagonistas, les hace avanzar.

Este planteamiento se vincula con un enfoque de enseñanza de las matemáticas basado en interpretar y trabajar matemáticamente, en contraposición a una enseñanza más descontextualizada y procedimental. En otras palabras, se trata de implementar *prácticas productivas*, que se refieren a “una acción o destreza educativa útil y provechosa para promover el aprendizaje de las matemáticas con sentido en todos los niveles escolares” (Alsina, 2020b, p. 3). El *Council for the Curriculum, Examinations & Assessment* (CCEA) señala que este enfoque basado en pensar y hacer, más que memorizar definiciones y procedimientos, es una de las competencias transversales que constituyen el núcleo del currículo, ya que permite desarrollar la capacidad de aplicar adecuadamente los conocimientos, comprensión y habilidades matemáticas en diferentes contextos y de diversas maneras para comunicar, gestionar la información, pensar de forma crítica, resolver problemas y tomar decisiones. Para lograr este propósito, lo ideal es que el profesorado utilice situaciones relevantes que requieran un pensamiento matemático, junto con dar la posibilidad a los niños y a las niñas de transferir sus conocimientos, según proceda, a otros contextos (CCEA, 2020). Se trata de acompañar este proceso, más que pautar la línea de actuación, por lo que el docente tiene que ser un jardinero, más que un escultor: p. ej., se pueden plantear preguntas como ¿qué ocurre cuando deformamos esta pieza de barro? ¿y cuando movemos un cuadrado que recibe una proyección de luz? (Figura 2), para fomentar que observen que las deformaciones de objetos de barro permiten descubrir propiedades topológicas y la manera que ponemos un cuadrado hace modificar su sombra y descubrir propiedades proyectivas, respectivamente. Son acciones que generan preguntas, y preguntas que provocan la necesidad de realizar más acciones.



Figura 2. Deformación de una pieza de barro y algunas sombras de un cuadrado. Fuente: GAMAR

Principio 3:

“Los materiales despiertan posibilidades: de conectar, de entender, de imaginar... las matemáticas”

El GAMAR está lleno de posibilidades. Las escuelas también. Ya se ha señalado que hay que ofrecer materiales muy seleccionados para conseguir un objetivo concreto, pero no podemos estar seguros de cómo los procesarán los niños y las niñas, solo de las posibilidades que les ofrecemos. Las regletas numéricas M. Antònia Canals, por ejemplo, ofrecen la posibilidad de descubrir estrategias de cálculo; las tarjetas de las peceras, diferenciar que la cantidad no depende de la medida de los peces; y la máquina de sumar, entender el concepto (Figura 3).



Figura 3. Regletas M. Antònia Canals, peceras y máquina de sumar, respectivamente. Fuente: GAMAR

Así, pues, la acción de manipular, es decir, de operar con las manos, aporta conocimientos diversos. Todos nosotros hemos vivido experiencias sorprendentes, no esperadas, al tocar algún objeto con las manos: la dureza de un objeto, el peso, la rugosidad, el sonido que hace, el sabor que tiene, etc. Esta información de tipo sensorial se obtiene por un proceso de activación de los receptores perceptivos que permiten descubrir las características físicas de los objetos (el color, la forma, la medida, el sabor, etc.). Este tipo de conocimiento se llama físico y tiene su origen en los objetos externos, en el mundo físico que nos rodea.

Pero, ¿qué ocurre cuando manipulamos dos o más objetos al mismo tiempo y los relacionamos? ¿Podemos decir que es un conocimiento físico o un conocimiento sólo físico? Alsina y Planas (2008) indican que la relación que hacemos no está propiamente en los objetos; es fruto de un proceso de abstracción que realizamos las personas: diferenciamos un objeto blando de uno duro; uno que pesa de uno que no pesa; uno suave de uno rugoso; pero no vemos, ni tocamos, ni olemos, ni oímos "la diferencia" entre estos objetos físicamente diferentes. Decimos que son diferentes porque relacionamos las experiencias obtenidas en la manipulación de estos objetos. Del mismo modo, si vemos cuatro objetos delante nuestro no vemos, ni tocamos, ni olemos, ni sentimos en ningún momento "el cuatro"; el cuatro surge de abstraer la coordinación de acciones al encontrarnos en situaciones donde había cuatro objetos. Es evidente, pues, que el hecho de detectar "la diferencia" o "el cuatro" va más allá del conocimiento físico. Ya se ha argumentado en el Principio 2 que estas abstracciones no existen por ellas mismas en la realidad, es decir, no provienen directamente de los objetos sino de la acción que nosotros hacemos con ellos. Desde esta perspectiva, además de aportar conocimiento físico, la manipulación de materiales permite hacer estas relaciones y construir conocimiento matemático, en el marco de *prácticas constructivas*.

Teniendo en cuenta, pues, la potencialidad de los materiales manipulativos para construir conocimiento matemático, el profesorado debe estar muy atento para ver cómo reaccionan los niños y las niñas y ayudarlos a convertir esta posibilidad en aprendizaje, aunque a menudo la posibilidad que se ofrece tome una dirección diferente de la que se había planificado inicialmente.

Principio 4:

“Solo se aprenden las matemáticas que se descubren”

Durante el proceso de aprendizaje de las matemáticas, querer ir demasiado rápido a menudo comporta consecuencias negativas. Hay que dar tiempo para poder pensar, para poder descubrir.

Desde inicios del siglo XX, la manipulación de materiales como herramienta para descubrir y desarrollar el conocimiento matemático y científico ha sido un campo muy investigado por numerosos expertos de prestigio nacional e internacional del ámbito de la psicología del aprendizaje, la pedagogía, las matemáticas y las ciencias experimentales, sobre todo. Entre ellos, destacan autores como Maria Montessori, Jean Piaget, Josep Estalella, Ovide Decroly, Celestin Freinet, Hans Freudenthal, Zoltan P. Dienes, Gastón Mialaret, Puig Adam y, más recientemente, la propia M. Antònia Canals, Claudi Alsina, Joan Casulleras, Adolf Almató, Rafael Pérez-Gómez o Fernando Corbalán..., junto con grupos de trabajo como el Grup Zero, el Quinzet o el Grup Perímetre, entre otros.

M. Antònia Canals repetía a menudo esta frase a sus estudiantes de magisterio: “Solo se aprende aquello que se descubre, dadles la oportunidad de hacerlo”. Desde esta perspectiva, Alsina y Planas (2008) indican que:

la manipulación es mucho más que una manera divertida de desarrollar aprendizajes. La manipulación de materiales es en ella misma una manera de aprender que ha de hacer más eficaz el proceso de aprendizaje sin hacerlo necesariamente más rápido. Por otra parte, el uso de materiales es una manera de promover la autonomía del aprendiz ya que se limita la participación de los otros, principalmente del adulto, en momentos cruciales del proceso de aprendizaje (p. 50).

Los materiales, pues, permiten que los niños y las niñas puedan ir a su ritmo y tener la posibilidad de descubrir, dando lugar a *prácticas heurísticas*. Si el maestro se avanza y explica el descubrimiento, los niños y las niñas únicamente practican, reproducen. El juego del tendedero de la Figura 4 es un buen ejemplo. El objetivo del juego es clasificar camisas que tienen diferentes características (tres cantidades diferentes de botones, dos tipos de manga y cuatro colores diferentes). El mismo material puede servir para clasificar las camisas según un criterio dado, es decir, practicar un concepto o podemos hacerles descubrir que, dependiendo de los grupos que queremos hacer (cantidad de hilos del tendedero), hay que clasificar según un criterio u otro.



Figura 4. Juego del tendedero. Fuente: GAMAR

Principio 5:**“Para ser competentes en matemáticas, hay que saber imaginar los conceptos”**

Paradójicamente, uno de los objetivos principales de los materiales manipulativos es dar herramientas a los niños y a las niñas para que puedan llegar a realizar aquella misma acción sin materiales. Durante el proceso de descubrimiento y experimentación con materiales visualizan de manera concreta la acción, en la situación misma; comprenden el significado; buscan regularidades o patrones; y, finalmente, crean una imagen mental: pueden imaginar qué pasará sin realizarlo. Este proceso se lleva a cabo en el marco de *prácticas creativas*: por ejemplo, cuando los niños y las niñas empiezan a descubrir la noción de suma, primero interactúan con dos o más grupos de objetos y los tocan, juntan, añaden, reúnen... y tienen la oportunidad de comprobar el resultado contando los objetos uno a uno; después, pueden empezar a descubrir algunas regularidades y patrones sencillos, cómo por ejemplo ver qué ocurre cada más que se añade o quita un objeto; finalmente, colocan los objetos dentro de una máquina de sumar como la de la Figura 5 y los imaginan, de manera que crean una representación mental.

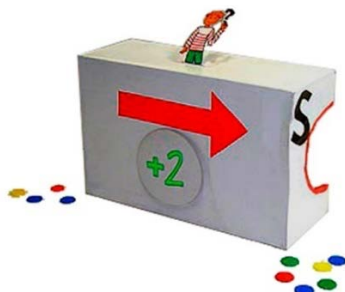


Figura 5. Máquina de añadir y quitar. Fuente: GAMAR

Muchos materiales del GAMAR van encaminados a conseguir esta habilidad de crear imágenes mentales. Algunos ejemplos que podemos citar son las regletas numéricas M. Antònia Canals, que son muy útiles para facilitar el cálculo mental y no el conteo; o el juego del garaje, que es una caja que esconde las acciones que se hacen para dar la oportunidad de pensar una parte del proceso (Figura 6): por ejemplo, imaginar qué ocurre cuando se ponen 4 coches en un garaje de 6 plazas requiere que los niños y a las niñas creen una representación mental que, posteriormente, pueden comprobar si es cierta y modificarla si hace falta. El buen dominio de cálculo mental consiste precisamente en la habilidad de imaginar números y operaciones.



Figura 6. Regletas numéricas M. Antònia Canals y juego del garaje. Fuente: GAMAR

Principio 6:**“Nuestra mente matemática puede hacerlo mejor que un objeto”**

Algunos objetos permiten visualizar conceptos matemáticos de una manera casi mágica. Por ejemplo, observar cómo se multiplican los objetos en dos espejos unidos por una cinta adhesiva (denominados también libros de espejos) ayuda a entender de una manera inmediata el concepto de producto como sumandos repetidos, como fracción, o como la parte y el todo. M. Antònia Canals siempre explicaba que después de trabajar con un libro de espejos para observar el resultado de repetir cinco veces cuatro bolas (Figura 7), un niño le comentó: “Así, ¿tenemos que pensar como si tuviéramos un espejo dentro de la cabeza?” y ella le contestó: “Sí, pero nuestra mente lo puede hacer todavía mejor que un espejo”, refiriéndose al hecho de que, a través del pensamiento matemático, los niños y las niñas no solo visualizan las ideas, sino que las pueden interpretar y analizar.

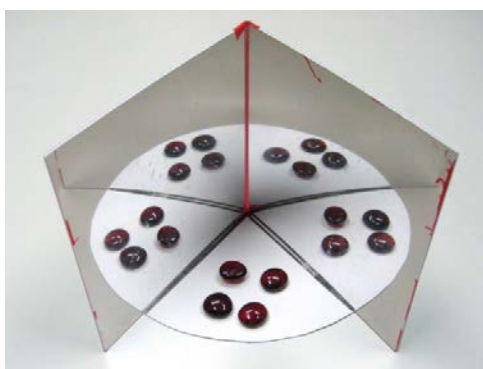


Figura 7. Bolas reflejadas en un libro de espejos con un ángulo de 72°. Fuente: GAMAR

Esta pequeña anécdota abre la puerta hacia la potencialidad cognitiva que tienen los niños y las niñas si se les dan oportunidades; y también ilustra cómo los materiales pueden ayudar a desarrollarla, razón por la cual las denominamos *prácticas cognitivas*. En el ejemplo de la Figura 7, por ejemplo, es interesante seguir tirando del hilo a partir de preguntas como: ¿cuántas veces se reflejarían las bolas si el ángulo entre los dos espejos fuese de 90°? ¿y si fuese de 60°? ¿y si fuese de 45°?, lo cual es una excelente coyuntura para que descubran numerosas conexiones dentro de las matemáticas, en especial entre el sentido espacial y el sentido numérico: por ejemplo, cuando se colocan dos espejos en ángulos de 90°, 60° y 45°, visualizan las tablas del 4, del 6 y del 8 respectivamente (conexión entre ángulo y multiplicación); o cuando se dan cuenta de que el ángulo de 90° refleja la tabla del 4 y el ángulo de 45° refleja la tabla del 8 (conexión entre mitad y doble).

El filósofo inglés Herbert Spencer, en *La educación intelectual, moral y física*, obra publicada por primera vez en 1861, habla de la necesidad de desarrollar la capacidad de manipulación que "tanta falta hace a la mayoría de gente" y de hacerlo de acuerdo a "principios de sentido común". Spencer (1989) menciona, precisamente, el ejemplo de la geometría. Señala que los saberes asociados a este bloque de contenidos se deberían presentar en relación a la manipulación de objetos del entorno, dejando que "la naturaleza nos enseñe el camino". Sólo más tarde se tendrían que introducir procedimientos geométricos sistemáticos y propiedades de un supuesto mundo plano. Después de un trabajo suficiente de las habilidades de observación, manipulación y descubrimiento, el aprendiz puede ser introducido a la geometría de las soluciones metódicas, pero todavía aquí se tiene que continuar dando prioridad a la observación, la manipulación y el descubrimiento. De acuerdo con Spencer, pues, lo que el aprendiz descubre por medio de la observación y la manipulación queda mejor aprendido que todo lo que se le

pueda explicar. Desde este punto de vista, los materiales son un punto de apoyo imprescindible para que la mente aprenda y comprenda.

Principio 7:

“Lo que pasa durante el aprendizaje de las matemáticas es más importante que las consecuencias del aprendizaje”

En la vida cotidiana, a menudo se utilizan expresiones con referencias matemáticas para expresar certezas absolutas o resultados incuestionables “porque dos y dos son cuatro”. Aun así, en el aprendizaje de las matemáticas nos damos cuenta de que, a pesar de que es necesario ser muy cuidadosos en los resultados, el proceso para llegar todavía es más importante. Los procesos o competencias matemáticas que se desencadenan como consecuencia del planteamiento de un reto durante la manipulación (resolución de problemas, razonamiento y prueba, conexiones, comunicación y representación) son más importantes que los resultados obtenidos. En este marco, habilidades socioafectivas como la empatía, la paciencia, el respeto por los demás, la superación personal... están también fuertemente presentes. Este planteamiento se vincula con la idea de *prácticas competenciales* en el aula de matemáticas: cuando se usan materiales, como ya se ha mencionado en el Principio 1, se debería promover que se movilicen distintas habilidades o procesos matemáticos como por ejemplo la resolución de problemas al plantear preguntas o retos, el lenguaje involucrado o bien la representación a través de dibujos, esquemas, tablas y o incluso gráficos.

Uno de los organismos que más ha contribuido a ofrecer una visión ampliada del conocimiento matemático que considere de forma explícita los procesos matemáticos es el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM), que considera cinco estándares de procesos: resolución de problemas, razonamiento y prueba, comunicación, conexiones y representación (NCTM, 2003). Este planteamiento curricular, de acuerdo con Alsina (2019), implica partir de un enfoque mucho más globalizado que no se limite a trabajar los contenidos aisladamente, sino de forma integrada con los procesos para favorecer la autonomía mental del alumnado, potenciando las estrategias creativas de resolución de problemas, la elaboración de hipótesis, la argumentación, el contraste, la negociación de significados, la construcción conjunta de soluciones y la búsqueda de formas para comunicar y representar planteamientos y resultados.

Desde este prisma, al diseñar prácticas de enseñanza de saberes matemáticos a partir de materiales, es altamente recomendable tomar decisiones acerca de a través de qué procesos van a enseñarse. Con base en ello, en la Figura 8 se ofrecen algunas orientaciones en forma de preguntas que debería plantearse el profesorado para promover la enseñanza de saberes matemáticos a través de los procesos.

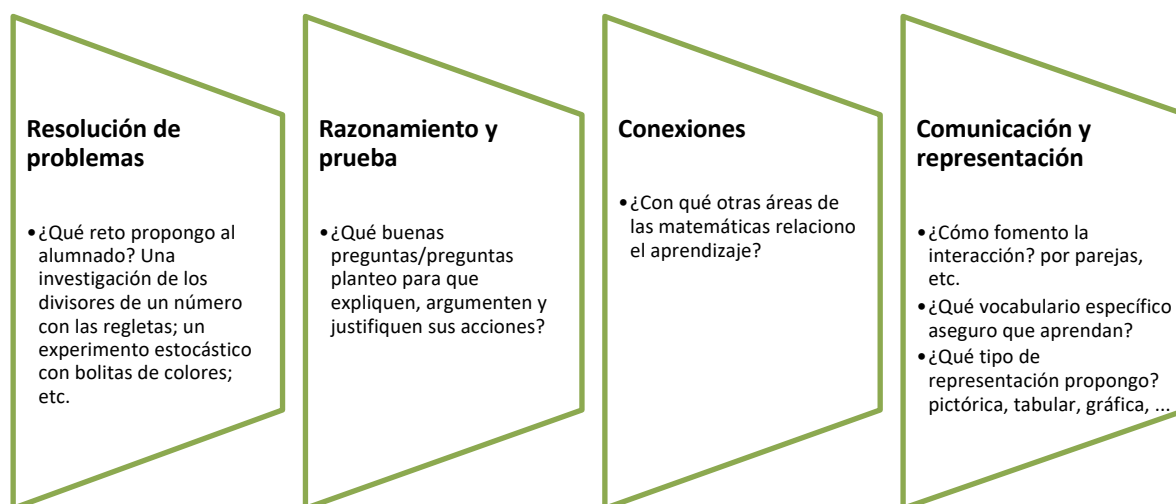


Figura 8. Guía de orientación para la planificación y gestión de prácticas matemáticas competenciales.

Fuente: Alsina (2020a)

Principio 8:

“El error y la corrección del error es la manera de aprender matemáticas”

En el proceso de aprendizaje de las matemáticas, cometer errores es natural. Nos indica que los niños y las niñas no solo están reproduciendo conocimientos, sino que los están creando. Los materiales y los juegos facilitan la rectificación y la comprobación, pero sobre todo permiten aprender del error. Por un lado, el alumnado puede identificar fácilmente los errores y buscar maneras de resolverlos; y, por otro lado, el profesorado puede entender el motivo por el que un niño o una niña se equivoca, saber en qué momento evolutivo se encuentra y ayudarlo a avanzar. La buena gestión del error en el marco de *prácticas correctivas* mejora la seguridad de los niños y las niñas y los hace progresar. Aun así, hay que supervisar que no se perpetúen errores, sino que las dificultades detectadas tienen que servir como punto de partida para buscar otros materiales y recursos por resolverlos.

En el GAMAR, por ejemplo, hay una gran variedad de materiales para comprender desde puntos de vista muy diferentes una misma noción o idea matemática y, de este modo, evitar muchos de los posibles errores asociados. Adicionalmente, hay que tener muy en cuenta también que diferentes modelos concretos mejoran la comprensión de los conceptos. A modo de ejemplo, en la Figura 9 se muestran algunos de los materiales del GAMAR para ayudar a comprender la noción de ángulo.

Para entender el concepto de ángulo no es suficiente con observar un ángulo dibujado, porque los niños y las niñas acostumbran a dar mayor importancia a la longitud de las semirrectas que lo forman que a la amplitud del ángulo. Esta visión sesgada sobre lo que representa el ángulo se puede evitar o corregir con actividades vivenciales o con materiales que permitan percibir el giro y el cambio de amplitud al mover uno de los lados. Por ejemplo, el material de la imagen izquierda de la Figura 9 es útil para observar que, si unos muñecos sujetan un palo que representa uno de los lados del ángulo y se hacen girar conjuntamente sin desplazar el vértice, se puede percibir que todos han girado lo mismo, pero unos se han desplazado más que otros; el material de la imagen central de la Figura 9 permite ver lo que representa la amplitud del ángulo; finalmente, la imagen derecha de la Figura 9 ayuda a visualizar

Del Gamar a la escuela: Principios sobre el uso de materiales manipulativos en el aula de mat.

Á. Alsina y E. Bosch i Casas

que, al desplazarse sobre un polígono analizando en qué sentido giramos en los vértices, ayuda a comprender el significado de concavidad y convexidad.

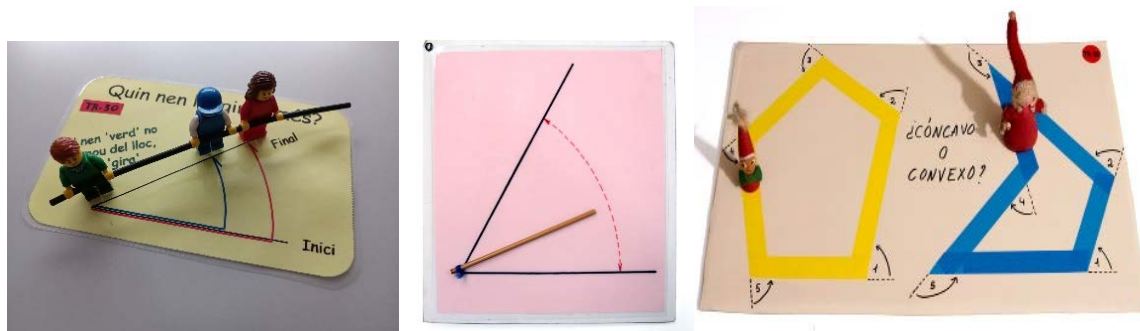


Figura 9. Algunos materiales manipulativos para comprender la noción de ángulo. Fuente: GAMAR

Principio 9:

“El esfuerzo para aprender matemáticas tiene que estar en la frontera de mis posibilidades”

M. Antònia Canals afirmaba muy a menudo que los materiales no sirven para jugar, sino para pensar. Pensar para progresar, para comprender. Es por este motivo que los materiales tienen que ser adecuados a las posibilidades de la persona que los utiliza. Hay que conocer cuáles son adecuados en cada edad, pero también poder ofrecer un abanico de actividades de diferentes niveles para conseguir que cada niño y cada niña puedan progresar, en función de sus posibilidades. Los recursos demasiado fáciles o demasiado difíciles se alejan del objetivo propuesto.

Este planteamiento se vincula con la idea de *prácticas inclusivas* en el aula de matemáticas: en lugar de plantear una enseñanza descontextualizada, procedimental y mecanicista, accesible para unos cuantos, es necesario formar a todo el alumnado para que puedan interpretar y trabajar matemáticamente. Desde la perspectiva del uso de materiales manipulativos en el aula, esto implica ofrecer a todo el alumnado, en función de sus diferencias individuales, la oportunidad de descubrir por sí mismos los conocimientos matemáticos, en lugar de transmitirles un conocimiento ya elaborado.

Desde este punto de vista, es recomendable considerar los principios fundamentales de la educación matemática inclusiva, lo que implica destacar, a su vez, los principios más generales de contextualización y personalización de los conocimientos en función de la especificidad de cada persona (Alsina y Planas, 2008). En este sentido, El NCTM (2003) planteó que uno de los seis Principios de la educación matemática es el Principio de Igualdad. Ya en aquel momento, este organismo especificó que la igualdad no significa que todo el alumnado tenga que recibir una educación idéntica, sino que, en función de las necesidades individuales, es necesario hacer adaptaciones que sean razonables. Aun así, con el tiempo, el término *igualdad* se ha ido substituyendo por el término *equidad* para evitar posibles confusiones.

En términos generales, pues, la equidad requiere, por un lado, grandes expectativas y oportunidades válidas para todos, lo cual supone un reto importante respecto a las falsas creencias de que solo algunos estudiantes pueden aprender matemáticas o que sólo es recomendable utilizar materiales manipulativos en algunas etapas educativas. En este sentido, Alsina y Planas (2008) exponen el siguiente ejemplo:

Hace poco, una maestra de educación primaria acostumbrada a trabajar con materiales nos explicó que había conseguido que en clase de matemáticas sus alumnos estuvieran casi tan contentos como estaban en el patio. Este comentario contrasta con las palabras de una profesora de secundaria. Durante un curso de formación permanente propusimos insistentemente el uso de materiales para el trabajo de matemáticas en la educación secundaria. El último día del curso nos agradeció las sesiones y añadió: "Ha sido muy interesante. De todos modos, no usaré materiales el año próximo porque no quiero que mis alumnos confundan la hora de clase de matemáticas con la hora del patio". Las dos maestras hicieron referencia al patio de la escuela, pero en sentidos muy diferentes. La primera maestra daba prioridad a cómo aprende el alumnado, mientras que la segunda pensaba en cómo tenía que enseñar (p. 54).

Para Alsina y Planas (2008), la manipulación no es un valor educativo restringido a las primeras edades y propio de una educación matemática iniciática. La eficacia de la educación tiene que ver, a cualquier edad, con la satisfacción del aprendiz hacia las tareas que se le proponen. El uso de materiales ha de beneficiar esta satisfacción. Con todo, edades diferentes requieren usos diferentes de materiales (Alsina, 2020a). Desde esta perspectiva, el GAMAR, por ejemplo, ofrece materiales diversos para trabajar las fracciones en todos los niveles: ordenación de fracciones, equivalencias, parte de un todo, operaciones con fracciones, etc. (Figura 10); sin embargo, considerando los principios de la educación matemática inclusiva, hay que saberlos seleccionar bien en función de las posibilidades del alumnado: si se ofrecen las tarjetas para ordenar fracciones a niños y niñas que no están preparados para entender el concepto (imagen izquierda de la Figura 10), seguramente pueden ordenarlas visualmente, pero el hecho de ser utilizado de manera mecánica y sin comprensión puede ser contraproducente por el aprendizaje.



Figura 10. Materiales manipulativos para trabajar las fracciones en diferentes niveles. Fuente: GAMAR

Principio 10:

“Hay que potenciar diferentes técnicas de expresión de las ideas matemáticas”

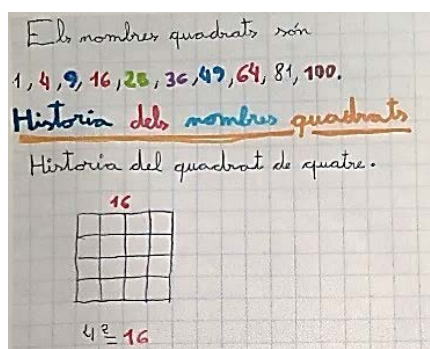
Como se ha indicado en los Principios precedentes, los materiales permiten actuar, observar, descubrir, visualizar... pero el proceso de aprendizaje no se acaba aquí. Los niños y las niñas tienen que saber expresar lo que han realizado, lo que han aprendido. Por esta razón, es muy recomendable que estas acciones se acompañen adecuadamente en el marco de *prácticas expresivas*, que contribuyan a

Del Gamar a la escuela: Principios sobre el uso de materiales manipulativos en el aula de mat.

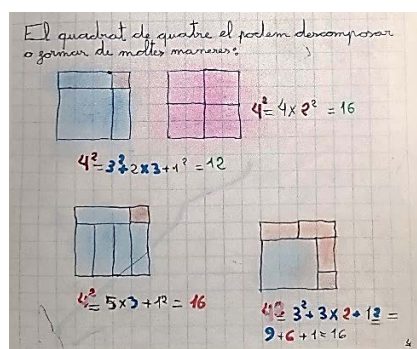
Á. Alsina y E. Bosch i Casas

potenciar el uso de diferentes técnicas para expresar las acciones con dichos materiales y, sobre todo, favorecer que cada niño y cada niña encuentren una manera de hacerlo: verbalizando, con dibujos, esquemas, símbolos... La comunicación y representación, pues, forman parte del proceso de trabajar con materiales.

Se puede hacer de manera colectiva en la clase, explicar las estrategias en pequeño grupo o tener una libreta de descubrimientos individual para documentar tanto el proceso que se ha realizado como lo que se ha aprendido. En estas observaciones, a menudo los niños y las niñas resaltan como las dificultades que han surgido durante el proceso les ha servido para profundizar en la consigna dada. Además, se dan cuenta de que hay muchas estrategias para llegar al mismo resultado y que compartirlas permite aprender de los demás niños y niñas (Figura 11).



Los números cuadrados son
Historia de los números cuadrados
Historia del cuadrado de cuatro



El cuadrado de cuatro lo podemos descomponer o
formar de muchas maneras.

Figura 11. Libreta de descubrimientos. Fuente: GAMAR

En el ejemplo de la Figura 11, si bien hay algunos errores matemáticos (falta de paréntesis para escribir correctamente las expresiones algebraicas; error en el resultado del producto notable), se aprecia que el niño que ha escrito este descubrimiento en su libreta ha representado diversas maneras diferentes de descomponer el cuadrado de cuatro. De este modo, promover que se pongan en común estas representaciones con otros niños y niñas puede ser una herramienta muy potente para promover el aprendizaje entre iguales, por ejemplo.

3. Consideraciones finales

En este artículo de presentación de la nueva sección *Materiales para hacer y pensar matemáticas* se han presentado diez reflexiones y pensamientos de M. Antònia Canals que se han denominado Principios, para destacar los aspectos clave que se deberían tener en cuenta con relación al uso de materiales manipulativos en la clase de matemáticas.

M. Antònia Canals ha sido una destacada impulsora del uso de materiales manipulativos para aprender matemáticas. Los datos de su extensa labor de divulgación, desde finales de la década de los

sesenta del siglo XX hasta bien entrado el siglo XXI, han sido recopilados en varias revisiones bibliográficas, como por ejemplo en el libro *M. Antònia i Canals: El compromís con la renovació de la escola* (Alsina y Soler, 2005), donde se comenta una por una toda su producción hasta 2004 o, más recientemente, en el marco de la tesis doctoral *Didáctica de las matemáticas y desarrollo profesional de una maestra: El caso de Maria Antònia Canals i Tolosa* (Sotos, 2015). A partir de la fuerte inspiración de autores de reconocido prestigio internacional como Maria Montessori, Alexandre Galí, Zoltan P. Dienes, Frédérique Papy, Lucienne Felix o Jean Piaget, M. Antònia Canals fue construyendo un cuerpo de conocimientos específico para la educación matemática infantil y primaria, principalmente, a partir del firme convencimiento de que la enseñanza pasaba necesariamente por promover la interacción de los niños y niñas con el material manipulativo, razón por la cual en la recta final de su carrera profesional creó el Gabinet de Materials i de Recerca per a la Matemàtica a l'Escola (GAMAR), en el que junto con sus colaboradores (docentes en activo, técnicos de apoyo, etc.), fue recopilando una gran diversidad de materiales para lograr introducir esta visión en las escuelas.

Hoy, años después de su fallecimiento, su mensaje sigue muy vivo. En este sentido, los diez Principios sobre el uso de los materiales manipulativos en el aula de matemáticas que se han presentado en este artículo pretenden divulgar y actualizar, si cabe, sus planteamientos. De este modo, los Principios de esta hoja de ruta se alejan de un simple listado de beneficios de los materiales y, en su lugar, pretenden ser un instrumento de orientación y de reflexión sobre los aspectos clave que hay que tener en cuenta para usarlos eficazmente en el aula de matemáticas: criterios de selección, funciones y gestión del aula.

En relación a los criterios de selección (Principio 1), se ha destacado que el profesorado de matemáticas debe disponer de un conocimiento profesional crítico para tener criterios objetivos que permitan seleccionar de manera eficaz los materiales manipulativos que garanticen un buen desarrollo de la competencia matemática, en el marco de prácticas selectivas. Desde esta perspectiva, se ha argumentado que un buen material debe facilitar la resolución de problemas, el razonamiento y la prueba, la comunicación, las conexiones y/o la representación (Alsina, 2020a).

Sobre las funciones (Principios 2 a 6), se ha enfatizado que los materiales no sirven para hacer la clase de matemáticas más divertida o entretenida, sino que su verdadero papel consiste en potenciar una serie de habilidades que contribuyen a desarrollar el pensamiento matemático, teniendo en cuenta que ello quizás supone ir a un ritmo más lento, pero más eficaz. Desde este prisma, los Principios 2 a 6 se han vinculado con prácticas productivas, constructivas, heurísticas, creativas y cognitivas, respectivamente. En el marco de estas prácticas se han destacado acciones asociadas al uso de los materiales como pensar, analizar, reaccionar, descubrir, conectar o entender ideas matemáticas abstractas, desde lo concreto.

Finalmente, respecto a la gestión (Principios 7 a 10), se ha resaltado que los materiales por ellos mismos no son garantía de aprendizaje, por lo que el profesorado tiene un rol muy relevante a través de prácticas competenciales, correctivas, inclusivas y expresivas, respectivamente. En este sentido, en los cuatro últimos Principios se ha fundamentado que el uso de materiales debe llevarse a cabo en el marco de prácticas que consideren explícitamente los procesos, habilidades o competencias matemáticas, junto con otras cuestiones como la gestión de los errores del alumnado o promover la comunicación y la representación.

En síntesis, los diez Principios sobre el uso de los materiales manipulativos en el aula de matemáticas son el punto de partida para ir presentando diferentes materiales en los próximos artículos de esta sección, con el propósito de enfatizar sobre todo cómo promover su potencial para desarrollar los diferentes sentidos matemáticos.



Bibliografía

- Alsina, Á. (2019). *Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas (6-12 años)*. Graó.
- Alsina, Á. (2020a). El Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas: ¿por qué?, ¿para qué? y ¿cómo aplicarlo en el aula? *TANGRAM – Revista de Educação Matemática*, 3(2), 127-159. <https://doi.org/10.30612/tangram.v3i2.12018>.
- Alsina, Á. (2020b). Cinco prácticas productivas para una enseñanza de las matemáticas a través de los procesos. *Saber & Educar*, 28, 1-13.
- Alsina, Á. y Planas, N. (2008). *Matemática inclusiva. Propuestas para una educación matemática accesible*. Narcea S.A. de Ediciones.
- Alsina, Á. y Soler, J. (2005). Bibliografía comentada de M. Antònia Canals. En Á. Alsina y J. Soler (Eds.), *M. Antònia Canals: El compromís amb la renovació de l'escola* (pp. 127-179). Eumo Editorial.
- Biniés, P. (2008). *Converses matemàtiques amb Maria Antònia Canals. O com fer de les matemàtiques un aprenentatge apassionant*. Graó.
- Canals, M. A. (2001). *Vivir las matemáticas*. Octaedro-Rosa Sensat.
- Charles, R. (2005). Big ideas and understandings as the foundation for elementary and middle school mathematics. *Journal of Mathematics Education Leadership*, 7, 9–24.
- Council for the Curriculum, Examinations & Assessment [CCEA] (2020). Using Mathematics. <https://ccea.org.uk/foundation-stage/curriculum/using-mathematics>.
- Korthagen, F.A. (2001). *Linking practice and theory. The pedagogy of realistic teacher education*. Lawrence Erlbaum Associates.
- López, M. (2015). La influència del mètode d'ensenyament i de les bastides en l'aprenentatge de les matemàtiques a l'educació infantil. Tesis doctoral. Universidad de Girona.
- López, M. y Alsina, Á. (2018). ¿Qué andamios se ofrecen para enseñar matemáticas en Educación Infantil? Preguntas e interacciones en función del método. *Épsilon - Revista de Educación Matemática*, 99, 29-42.
- National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. Sociedad Andaluza de Profesores de Matemáticas “Thales”.
- Saramago, J. (2000). *La caverna*. Círculo de Lectores S.A.
- Singapore Ministry of Education (2018). *2020 secondary mathematics syllabuses*. MOE.
- Sotos, M. (2015). *Didáctica de las matemáticas y desarrollo profesional de una maestra. El caso de Maria Antònia Canals i Tolosa*. Tesis Doctoral. Universidad de Salamanca.
- Sotos, M. (2016). *M. Antònia Canals i Tolosa. Renovación pedagógica y didáctica de las matemáticas*. Octaedro.
- Spencer, H. (1989). *L'educació intel·lectual, moral i física*. Eumo Editorial (traducción de la obra inglesa de 1861).
- Stevens, J.O. (2003). *El darse cuenta. Sentir, imaginar y vivenciar*. Cuatro Vientos.
- Toh, T.L. y Yeo, J.B.W. (2019). Big Ideas in Mathematics: *Yearbook 2019, Association of Mathematics Educators*. WSPC.

Ángel Alsina. Departamento de Didácticas Específicas, Área de Didáctica de las Matemáticas. Facultad de Educación y Psicología, Plaça Sant Domènec, 9, 17004 Girona (Catalunya). Profesor Catedrático de Didáctica de las Matemáticas y Director de la Cátedra de Didáctica de las Matemáticas M^a. Antonia Canals de la Universidad de Girona. Sus líneas de investigación están centradas en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en las primeras edades y en la formación del profesorado de matemáticas. Ha publicado artículos científicos y libros sobre cuestiones de educación matemática, y ha llevado a cabo actividades de formación permanente del profesorado de matemáticas en España y en América Latina.

Ester Bosch. Escola Pompeu Fabra (Anglès, Girona). Maestra responsable del Gabinet de Materials i de Recerca per a la Matemàtica a l'Escola (GAMAR), que forma parte de la Cátedra de Didáctica de las Matemáticas M^a. Antonia Canals de la Universidad de Girona. Ha publicado artículos sobre cuestiones de educación matemática y ha llevado a cabo actividades de formación permanente del profesorado de matemáticas.

Notas al pie

¹Cátedra de Didáctica de las Matemáticas M. Antònia Canals: patrocinada por el Departament d'Educació i Formació Professional de la Generalitat de Catalunya, Ajuntament de Girona y Universitat de Girona. Sus líneas de actuación se pueden consultar en: <https://www.udg.edu/es/catedres/didactica-de-les-matematiques>

²Gamar: Gabinet de Materials i de Recerca per a la Matemàtica a l'Escola. Los materiales disponibles se pueden consultar en: <https://www2.udg.edu/projectesbiblioteca/GAMAR/Inici/tabid/17145/language/es-ES/Default.aspx>

³CESIRE: centre de recursos pedagògics específics de suport a la innovació i la recerca educativa. Se pueden consultar las ideas centrales de matemáticas en: <https://sites.google.com/xtec.cat/idees-centrals-matematiques-ip/inici/presentació>

